

Planteig d'equacions

1. En una granja hi ha conills i gallines. Si sabem que hi ha 30 caps i 80 potes calculeu els animals de cada classe

Si x són els conills i y les gallines, podem plantejar

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 80 \end{cases}$$

Multipliquem la primera equació per 2 i la restem de la segona. Així eliminem y

$$2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

D'on obtenim $y=20$. Hi ha 10 conills i 20 gallines en aquesta granja.

2. Volem repartir una quantitat entre un grup de persones. Si donem a cada una 180 € en sobren 20. Si donem a cada un 190 en falten 10. Calcula el total que volem repartir i la quantitat de persones

Si x és el total que repartim i y el nombre de persones podem plantejar

$$\begin{cases} x = 180y + 20 \\ x = 190y - 10 \end{cases}$$

Resolem i obtenim, restant les equacions

$$0 = 10y - 30 \Rightarrow y = 3$$

i $x=560$

3. Si un amic dóna 1 € a l'altre tots dos tindrien el mateixos diners. Si el segon donés 1 € al primer aquest tindrà el doble dels diners del seu amic. Calculeu quant té cada un dels amics.

Si el primer té x i dóna 1 al segon tenen $x-1$ i $y+1$

Si el segon dóna 1 al primer tenen $x+1$ i $y-1$

$$\begin{cases} x - 1 = y + 1 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

si resolem obtenim $y=5$ i $x=7$

4. Calcula un nombre de dues xifres si sabem que sumen 9 i que si l'invertim s'obté un nombre 9 unitats major

Siguin d i u les xifres que indiquen les desenes i les unitats. El valor del número és $10d+u$ i el número invertit és $10u+d$. Podem plantejar

$$\begin{cases} d + u = 9 \\ 10d + u + 9 = 10u + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d + u = 9 \\ 9d - 9u = -9 \end{cases}$$

multipliquem la primera equació per 9 i restem la segona

$$\begin{cases} 9d + 9u = 81 \\ 9d - 9u = -9 \end{cases} \Rightarrow 18d = 72 \Rightarrow d = \frac{72}{18} = 4$$

d'on $d=4$ i $u=5$. El nombre és el 45

5. Un amic diu a un altre: "jo tinc el doble de l'edat que tu tenies quan jo tenia la que tu tens, i quan tu tinguis l'edat que jo tinc ara, la suma de les nostres edats serà 36". Quina edat té cada amic?

Inicialment un té x i altre x . El que parla té x anys i és el més gran. Quan x tenia y anys, l'amic que ara té y anys tenia $y-(x-y)$. Per últim quan y tindrà x anys, aquest ha de tenir $x+(x-y)$.

dins de $x-y$ anys	$x+(x-y)$	x
ara	x	y
fa $x-y$ anys	y	$y-(x-y)$

Podem plantejar

$$\begin{cases} x = 2(y - (x - y)) \\ x + (x - y) + x = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4y - 2x \\ 3x - y = 36 \end{cases}$$

resolem aïllant y de la segona equació i substituint a la primera

$$x = 4(3x - 36) - 2x \Rightarrow x = 12x - 144 - 2x \Rightarrow 144 = 9x \Rightarrow x = 16$$

si $x=16$ $y=12$. Tenen 16 i 12 anys

6. La senyora Maria diu a la senyora Paquita: “jo tinc el doble de l’edat que vostè tenia quan jo tenia l’edat que vostè té. La suma del triple de l’edat que vostè té i l’edat que jo tindrà quan vostè tingui l’edat que jo tinc és de 280”. Quina és l’edat d’aquestes senyores?

Diem x a l’edat de la senyora Maria i y a la de la senyora Paquita. Quan la senyora Maria tenia y anys la senyora Paquita en tenia $y-(x-y)$. Quan la senyora Paquita tingui x anys la senyora Maria en tindrà $x+(x-y)$

$$\begin{cases} x = 2(y - (x - y)) \\ 3y + x + (x - y) = 280 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4y - 2x \\ 2x + 2y = 280 \end{cases}$$

resolem el sistema aïllant y a la primera equació i substituint

$$2x + 2\left(\frac{3x}{4}\right) = 280 \Rightarrow 2x + \frac{3x}{2} = 280 \Rightarrow \frac{7x}{2} = 280 \Rightarrow x = 80$$

si $x=80$ $y=60$. Tenen 80 i 60 anys

7. Tres amics juguen tres partides de daus de manera que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres una quantitat igual a la que cada un d’ells tingui en aquell moment. Cada un perd una partida i queda al final amb 24 €. Quants diners tenia cada jugador en començar el joc?

Sigui x, y i z els diners al començar el joc de cada jugador. Cada un d’ells perd una partida i els diners que tenen són

	x	y	z
perd 1	$x-y-z$	$2y$	$2z$
perd 2	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $3y-x-z$	$4z$
perd 3	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)=$ $-x-y+7z$

tots tenen, al final, 24 €

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 24 \\ 2(3y - x - z) = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{cases}$$

Sumem la primera i la segona equació i eliminem x. Sumem la primera i la tercera i també eliminem x

$$\begin{cases} 2y - 2z = 18 \\ -2y + 6z = 30 \end{cases}$$

Sumem i eliminem y. Obtenim

$$4z = 48 \Rightarrow z = 12$$

si $z=12$, $y=21$ i $x=39$

8. Una colla de segadors ha de segar dos camps, un de doble superfície que l'altre. Durant mig dia tots els segadors van estar treballant en el camp més gran. L'altra meitat del dia van treballar la meitat dels segadors en el camp petit i l'altra meitat va seguir treballant en el camp gran. Va quedar per acabar una part del camp petit, on un segador va haver de treballar tot un dia. Calculeu els segadors de la colla (Problema referenciat per Tolstoi)

Siguin x el nombre de segadors i y la superfície que sega un treballador en un dia.

Si tots treballen mig dia en el camp gran seguen una superfície de

$$x \frac{1}{2} y = \frac{xy}{2}$$

La meitat treballa mig dia en el mateix camp gran i fan

$$\frac{1}{2} x \frac{1}{2} y = \frac{xy}{4}$$

aleshores han acabat tot el camp gran, la superfície és

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$$

La superfície del camp petit la seguen mig dia la meitat dels segadors i un tot un dia

$$\frac{1}{2} x \frac{1}{2} y + y = \frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}$$

Fem servir que el camp gran té doble superfície que el camp petit. Podem plantejar

$$2 \left(\frac{xy + 4y}{4} \right) = \frac{3xy}{4}$$

si resollem aquesta equació obtenim

$$2xy + 8y = 3xy \Rightarrow y(2x + 8) = 3xy \Rightarrow 2x + 8 = 3x \Rightarrow x = 8$$

La colla està formada per 8 segadors

9. En un prat poden menjar 70 vaques durant 24 dies i 30 vaques durant 60 dies. Quantes vaques es menjaran tota l'herba del prat en 96 dies?. Tingueu present que l'herba creix cada dia. (Variant d'un problema de Newton)

Imaginem que el prat té, inicialment, una unitat d'herba. Sigui x la quantitat d'herba que es menja una vaca en un dia i y la quantitat d'herba que creix cada dia.

Si 70 vaques acaben l'herba del prat en 24 dies, vol dir que es mengen l'herba que hi havia en el prat (una unitat) més l'herba que ha crescut en el prat aquests 24 dies.

Podem plantejar

$$70 \cdot 24 \cdot x = 1 + 24y$$

i, de la mateixa manera

$$30 \cdot 60 \cdot x = 1 + 60y$$

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 1680x - 24y = 1 \\ 1800x - 60y = 1 \end{cases}$$

Si fem servir el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -24 \\ 1 & -60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1680 & -24 \\ 1800 & -60 \end{vmatrix}} = \frac{-36}{-57600} = \frac{1}{1600}$$

Indica que una vaca es menja cada dia aquesta fracció de l'herba del camp. Si calculem y obtenim

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1680 & 1 \\ 1800 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1680 & -24 \\ 1800 & -60 \end{vmatrix}} = \frac{-120}{-57600} = \frac{1}{480}$$

que és la fracció d'herba del camp que creix cada dia

En els 96 dies que ens pregunten, si n són el número de vaques, podem escriure

$$n \cdot 96 \cdot \frac{1}{1600} = 1 + 96 \cdot \frac{1}{480}$$

Fent operacions

$$\frac{96n}{1600} = \frac{576}{480} \Rightarrow n = \frac{1600 \cdot 576}{96 \cdot 480} = 20$$

20 vaques es menjaran l'herba del camp en els 96 dies.